CAPÍTULO 9

VETOR GRADIENTE: INTERPRETAÇÃO GEOMÉTRICA

9.1 Introdução

Dada a função real de n variáveis reais,

$$\begin{array}{rcl} f : Dom(f) \subseteq \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ X = (x_1, x_2, ..., x_n) & \mapsto & f(x_1, x_2, ..., x_n) \end{array},$$

se f possui todas as derivadas parciais de primeira ordem em $X_0 \in Dom(f)$, definimos o vetor gradiente de f em X_0, denotado por $\nabla f(X_0)$, como

$$\nabla f(X_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(X_0), \ \frac{\partial f}{\partial x_2}(X_0), \quad \ldots \ \frac{\partial f}{\partial x_n}(X_0) \right).$$

Vamos agora nos restringir ao caso em que f é uma função diferenciável e apresentar a interpretação geométrica do gradiente de uma função de duas e de três variáveis.

9.2 Vetor Gradiente de uma Função de Duas Variáveis: Interpretação Geométrica

Considere a função

$$\begin{array}{rcl} f : Dom(f) \subseteq \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ X = (x, y) & \mapsto & f(X) = f(x, y) \end{array}$$

Suponha que f é de classe C^1 no aberto $A \subseteq Dom(f) \subseteq \mathbb{R}^2$ e seja $(x_0, y_0) \in A$ um ponto pertencente à curva de nível k de f. Suponha ainda que $\nabla f(x_0, y_0) \neq (0, 0)$. Considere agora uma curva arbitrária C, que contém o ponto (x_0, y_0), e está inteiramente contida na curva de nível k de f. (Não se preocupe agora com a existência desta curva. Mais tarde, veremos que as condições anteriormente impostas garantem isto). Além disso, suponha que C é parametrizada pela função

$$\begin{array}{rcl} \gamma : Dom(\gamma) \subseteq \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t & \mapsto & \gamma(t) = (x(t), y(t)) \end{array}$$

e que γ é diferenciável no intervalo aberto $I \subset Dom(\gamma)$, onde I é um intervalo que contém t_0, onde t_0 é tal que $\gamma(t_0) = (x_0, y_0)$ e $\gamma(t) \in A$, para todo $t \in I$. Além disso, vamos supor que $\vec{\gamma}\,'(t_0) \neq (0,0)$. Observe que dizer que C está inteiramente contida na curva de nível k de f se traduz em afirmar que

$$f(\gamma(t)) = k, \qquad \forall\ t \in Dom(\gamma)$$

e, em particular, que

$$f(\gamma(t)) = k, \qquad \forall\ t \in I \subset Dom(\gamma) \tag{1}$$

Derivando os dois lados da equação (1), obtemos que

$$\frac{d}{dt}\left(f(\gamma(t))\right) = \frac{d}{dt}\left(k\right), \quad \forall\, t \in I,$$

que, pela regra da cadeia, fornece que

$$\nabla f(\gamma(t)) \cdot \vec{\gamma}\,'(t) \;=\; 0, \qquad \forall\ t \in I.$$

Desta forma, em particular, temos que

$$\nabla f(\gamma(t_0)) \cdot \vec{\gamma}\,'(t_0) \;=\; 0. \tag{2}$$

Lembrando que $\gamma'(t_0)$ fornece o vetor tangente à curva C no ponto $\gamma(t_0) = (x_0, y_0)$, como supusemos que $\nabla f(x_0, y_0) \neq (0,0)$ e $\vec{\gamma}\,'(t_0) \neq (0,0)$, a Equação (2) acima afirma que $\nabla f(x_0, y_0)$ é perpendicular à curva C, no ponto (x_0, y_0). Como C é uma curva arbitrária contida na curva de nível k de f, concluímos que

" O vetor gradiente de f no ponto (x_0, y_0) é perpendicular à curva de nível de f que contém o ponto (x_0, y_0)."

Dizemos assim, que $\nabla f(x_0, y_0)$ é um *vetor normal* à curva de nível k de f, no ponto (x_0, y_0). A equação cartesiana da reta que contém o ponto (x_0, y_0) e é paralela ao vetor $\nabla f(x_0, y_0)$ é chamada de *reta normal* à curva de nível k de f no ponto (x_0, y_0). A equação desta reta é dada por

$$(x, y) = (x_0, y_0) + \lambda \nabla f(x_0, y_0), \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Além disso, a reta que contém o ponto (x_0, y_0) e é perpendicular a $\nabla f(x_0, y_0)$ é chamada de *reta tangente* à curva de nível k de f no ponto (x_0, y_0). A equação desta reta é dada por

$$\nabla f(x_0, y_0) \cdot [(x - x_0), (y - y_0)] = 0.$$

Lembre-se que já vimos (Capítulo 2) que se C é uma curva parametrizada pela função γ, então a equação paramétrica da reta tangente a esta curva no ponto $\gamma(t_0) = (x_0, y_0)$ é dada por

$$(x, y) = (x_0, y_0) + \lambda \vec{\gamma}\,'(t_0), \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

O que acabamos de ver, portanto, foi uma nova forma de encontrar a reta tangente de uma curva, no caso especial em que esta curva está contida na curva de nível de uma função.

Exemplo 9.2.1: A curva C, parametrizada pela função $\gamma : Dom(\gamma) \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, é uma curva que contém o ponto $(1, 2\sqrt{2})$ e é tal que $f(\gamma(t)) = 3$, $\forall t \in Dom(\gamma)$, onde $f(x, y) = x\sqrt{x^2 + y^2}$. Seja $t_0 \in I($ aberto $) \subseteq Dom(\gamma)$, tal que $\gamma(t_0) = (1, 2\sqrt{2})$ e $\gamma'(t_0) \neq (0, 0)$. Determine as equações da reta normal e da reta tangente a C no ponto $(1, 2\sqrt{2})$.

Solução: Como a curva C é tal que $f(\gamma(t)) = 3$, $\forall\ t \in Dom(\gamma)$, temos que C está contida na curva de nível 3 de f. Sendo assim, como sabemos que o gradiente de uma função é perpendicular as suas curvas de nível, vamos determinar o gradiente de f no ponto $(1, 2\sqrt{2})$, pois, desta forma, teremos determinado um vetor perpendicular a C no ponto $(1, 2\sqrt{2})$. Neste caso, temos que

$$\nabla f(x, y) = \left(\frac{2x^2 + y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right)$$

$$\Rightarrow \quad \nabla f(1, 2\sqrt{2}) = \left(\frac{10}{3}, \frac{2\sqrt{2}}{3} \right).$$

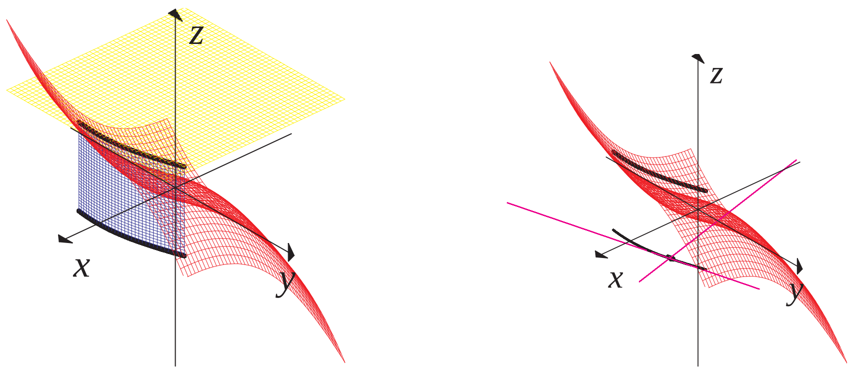
Sendo assim, a equação da reta perpendicular a C no ponto $(1, 2\sqrt{2})$ é dada por

$$\begin{aligned} (x, y) &= (1, 2\sqrt{2}) + \lambda \nabla f(1, 2\sqrt{2}), \quad \lambda \in \mathbb{R} \\ \Rightarrow \quad (x, y) &= (1, 2\sqrt{2}) + \lambda \left(\frac{10}{3}, \frac{2\sqrt{2}}{3} \right), \quad \lambda \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

e a equação da reta tangente a C no ponto $(1, 2\sqrt{2})$ é dada por

$$\begin{aligned} \nabla f(1, 2\sqrt{2}) \cdot \Big[(x, y) - \Big(1\,,\, 2\sqrt{2}\Big) \Big] &= 0 \\ \Rightarrow \quad \left(\frac{10}{3}, \frac{2\sqrt{2}}{3} \right) \cdot \Big(x - 1, y - 2\sqrt{2} \Big) &= 0. \end{aligned}$$

Nas figuras abaixo, temos um esboço do gráfico de f, do plano $z = 3$, da curva C e da reta tangente e da reta normal a C no ponto $(1, 2\sqrt{2})$. Veja que, como $f(\gamma(t)) = 3$, $\forall t \in Dom(\gamma)$, a interseção do gráfico de f com o cilindro cuja diretriz e a curva C e cuja geratriz é paralela ao eixo z, está contida no plano $z = 3$.



$\heartsuit$

9.3 Vetor Gradiente de uma Função de Três Variáveis: Interpretação Geométrica

Vamos agora repetir o mesmo raciocínio para o caso em que $n = 3$.

Para isto, considere a função

$$\begin{array}{rcl} f : Dom(f) \subseteq \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ X = (x, y, z) & \mapsto & f(X) = f(x, y, z) \end{array}$$

Suponha que f é de classe C^1 no aberto $A \subseteq Dom(f) \subseteq \mathbb{R}^3$ e seja $(x_0, y_0, z_0) \in A$ um ponto pertencente à superfície de nível k de f. Suponha ainda que $\nabla f(x_0, y_0, z_0) \neq (0, 0, 0)$. Considere agora uma curva arbitrária C, que contém o ponto (x_0, y_0, z_0), e está inteiramente contida na superfície de nível k de f. Além disso, suponha que C é parametrizada pela função

$$\begin{array}{rcl} \gamma : Dom(\gamma) \subseteq \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ t & \mapsto & \gamma(t) = (x(t), y(t), z(t)) \end{array}$$

e que γ é diferenciável no intervalo aberto $I \subset Dom(\gamma)$. Vamos supor ainda que o ponto $t_0 \in I \subset Dom(\gamma)$ tal que $\gamma(t_0) = (x_0, y_0, z_0)$ possui a propriedade de que $\vec{\gamma}\,'(t_0) \neq (0, 0, 0)$. Observe que dizer que C está inteiramente contida na superfície de nível k de f se traduz em afirmar que

$$f(\gamma(t)) = k, \qquad \forall \ t \in Dom(\gamma).$$

e, em particular, que

$$f(\gamma(t)) = k, \qquad \forall \ t \in I \subset Dom(\gamma) \tag{3}$$

Derivando os dois lados da equação (3), obtemos que

$$\frac{d}{dt}\left(f(\gamma(t))\right) = \frac{d}{dt}\left(k\right), \quad \forall\, t \in I$$

que, pela regra da cadeia, fornece que

$$\nabla f(\gamma(t)) \cdot \vec{\gamma}\,'(t) \;=\; 0, \qquad \forall\; t \in I.$$

Desta forma, em particular, temos que

$$\nabla f(\gamma(t_0)) \cdot \vec{\gamma}\,'(t_0) \;=\; 0.$$

Como supusemos que $\nabla f(x_0, y_0, z_0) \neq (0,0,0)$ e $\vec{\gamma}\,'(t_0) \neq (0,0,0)$, a equação acima afirma que $\nabla f(x_0, y_0, z_0)$ é perpendicular à curva C, no ponto (x_0, y_0, z_0). Como C é uma curva arbitrária contida na superfície de nível k de f, concluímos que

" O vetor gradiente de f no ponto (x_0, y_0, z_0) é perpendicular à qualquer curva que contém este ponto e está inteiramente contida na superfície de nível de f que contém o ponto (x_0, y_0, z_0). Portanto, o gradiente de f no ponto (x_0, y_0, z_0) é perpendicular à superfície de nível de f que contém este ponto."

Dizemos assim que $\nabla f(x_0, y_0, z_0)$ é um *vetor normal* à superfície de nível k de f, no ponto (x_0, y_0, z_0). A equação da reta que contém o ponto (x_0, y_0, z_0) e é paralela ao vetor $\nabla f(x_0, y_0, z_0)$ é chamada de *reta normal* à superfície de nível k de f no ponto (x_0, y_0, z_0). A equação desta reta é dada por

$$(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + \lambda \nabla f(x_0, y_0, z_0), \qquad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Além disso, o plano que contém o ponto (x_0, y_0, z_0) e é perpendicular a $\nabla f(x_0, y_0, z_0)$ é chamado de *plano tangente* à superfície de nível k de f no ponto (x_0, y_0, z_0). A equação deste plano é dada por

$$\nabla f(x_0, y_0, z_0) \cdot [(x - x_0), (y - y_0), (z - z_0)] = 0.$$

Exemplo 9.3.1: Determine as equações do plano tangente e da reta normal à superfície S dada por $xyz + x^3 + y^3 + z^3 = 3z$, no ponto $(1, -1, 2)$.

Solução: Considere a função f dada por

$$f(x, y, z) = xyz + x^3 + y^3 + z^3 - 3z; \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3.$$

Neste caso, temos que a superfície S é a superfície de nível 0 de f. Desta forma, como o gradiente é perpendicular às superfícies de nível da função, o gradiente de f no ponto $(1, -1, 2)$ é perpendicular à superfície S. Sendo assim, vamos calcular o gradiente de f.

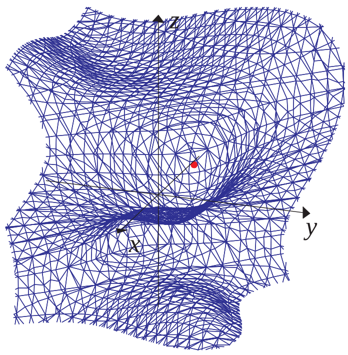
$$\nabla f(x, y, z) \;=\; \big(yz + 3x^2\,,\; xz + 3y^2\,,\; xy + 3z^2 - 3\big)$$

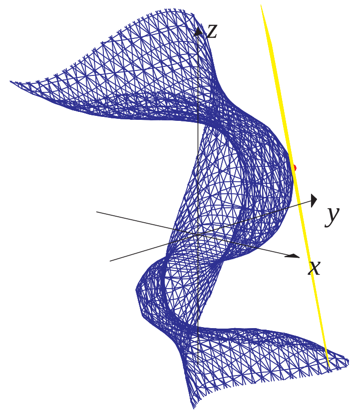
$$\Rightarrow\;\; \nabla f(1, -1, 2) \;=\; (1\,,\,5\,,\,8)\,.$$

Portanto, o plano tangente à superfície S no ponto $(1, -1, 2)$ é dado por

$$\begin{aligned} &\nabla f(1,-1,2)\cdot[(x,y,z)-(1\,,\,-1\,,\,2)] = 0 \\ \Rightarrow \quad &(1\,,\,5\,,\,8)\cdot(x-1, y+1, z-2) = 0 \\ \Rightarrow \quad &x - 1 + 5(y+1) + 8(z-2) = 0. \end{aligned}$$

Nas figuras abaixo temos um esboço da superfície S e do plano tangente à superfície S no ponto $(1, -1, 2)$.





♡

Concluímos que o gradiente de uma função de duas variáveis é perpendicular às curvas de nível desta função e que o gradiente de uma função de três variáveis é perpendicular às superfícies de nível desta função. Da mesma forma, de um modo geral, temos que o gradiente de uma função de várias variáveis é perpendicular aos conjuntos de nível desta função.

A seguir, vamos fazer uma observação envolvendo a equação de plano tangente à superfície de nível que acabamos de aprender com a equação de plano tangente a gráfico de função, vista no capítulo de diferenciabilidade.

Observação 9.3.1: Seja $g : Dom(g) \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^1 no aberto $A \subseteq Dom(g)$. Considere o ponto $(x_0, y_0) \in A$ e seja $z_0 = g(x_0, y_0)$. Vimos na aula de derivada (Parte 7) que, como g é derivável em (x_0, y_0) (pois é de classe C^1 no aberto A que contém (x_0, y_0)), então o gráfico de g possui plano tangente no ponto $(x_0, y_0, z_0) = (x_0, y_0, g(x_0, y_0))$, o qual é dado por

$$z = g(x_0, y_0) + \frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0).$$

Considere agora a função f definida por $f(x, y, z) = g(x, y) - z$, $(x, y, z) \in Dom(g) \times \mathbb{R}$. Com a definição da função f, observe que o gráfico da função g dado de forma explicita pela equação $z = g(x, y)$, também pode ser dado de forma implícita através da equação $f(x, y, z) = 0$; ou seja, o gráfico de g é a superfície de nível 0 de f. Portanto, toda curva C inteiramente contida no gráfico de g, também está inteiramente contida na superfície de nível 0 de f. Além disso, note que, se (x_0, y_0, z_0) pertence à superfície de nível 0 de f, então $z_0 = f(x_0, y_0)$. Desta forma, temos que $\nabla f(x_0, y_0, z_0)$ também é normal ao gráfico de g no ponto (x_0, y_0, z_0). Sendo assim, utilizando a equação do plano tangente à superfície de nível de f que contém o ponto (x_0, y_0, z_0), também deveríamos encontrar a equação do plano tangente ao gráfico de g no ponto (x_0, y_0, z_0). De fato, é isto que acontece. Realmente, uma vez que $\nabla f(x_0, y_0, z_0) = \left(\dfrac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0), \dfrac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0), -1\right)$, segue que a equação do plano tangente à superfície de nível de f que contém o ponto (x_0, y_0, z_0) é dada por

$$\begin{aligned}
& \nabla f(x_0, y_0, z_0) \cdot [(x - x_0), (y - y_0), (z - z_0)] = 0 \\
\Leftrightarrow\ & \left(\frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0), -1\right) \cdot [(x - x_0), (y - y_0), (z - g(x_0, y_0))] = 0 \\
\Leftrightarrow\ & \frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0) - (z - g(x_0, y_0)) = 0 \\
\Leftrightarrow\ & z = g(x_0, y_0) + \frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0),
\end{aligned}$$

conforme se esperava.

Exemplo 9.3.2: Considere a superfície S dada por $z = xy + x^3 + y^3$. Determine a equação do plano tangente a S no ponto $(1, 2, 11)$, pela duas formas mencionadas acima.

Solução:

1^a **forma**: Neste caso, vamos trabalhar com a função g dada por $g(x, y) = xy + x^3 + y^3$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ e utilizar a fórmula de plano tangente ao gráfico de uma função, pois S é o gráfico de g. De fato, $Gr(g) = \{(x, y, xy + x^3 + y^3) \in \mathbb{R}^3 \mid (x, y) \in \mathbb{R}^2\}$, o que significa que o gráfico de g é determinado pela equação $z = xy + x^3 + y^3$. Sendo assim, temos que o plano tangente ao gráfico da função g no ponto $(1, 2, 11)$ é dado por

$$z = g(1,2) + \frac{\partial g}{\partial x}(1,2)(x-1) + \frac{\partial g}{\partial y}(1,2)(y-2).$$

Desta forma, como $g(1,2) = 11$ e

$$\begin{aligned}
\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) &= y + 3x^2 \Rightarrow \frac{\partial g}{\partial x}(1,2) = 5 \\
\frac{\partial g}{\partial y}(x,y) &= x + 3y^2 \Rightarrow \frac{\partial g}{\partial x}(1,2) = 13
\end{aligned}$$

Portanto, o plano tangente ao gráfico da função g no ponto $(1, 2, 11)$ é dado por

$$z = 11 + 5(x-1) + 13(y-2).$$

2^a **forma**: Neste caso, vamos trabalhar com a função f dada por $f(x, y) = xy + x^3 + y^3 - z$, $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ e utilizar a fórmula de plano tangente à superfície de nível de uma função, pois S é a superfície de nível 0 f. De fato, $S_0(f) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, xy+x^3+y^3-z=0\}$, o que significa que a superfície de nível 0 de f é determinada pela equação $z = xy + x^3 + y^3$. Sendo assim, temos que o plano tangente a superfície de nível 0 de f no ponto $(1,2,11)$ é dada por

$$\nabla f\,(1,2,11) \cdot [(x,y,z) - (1,2,11)] = 0.$$

Vamos então calcular o gradiente de f.

$$\nabla f(x,y,z) \;=\; \big(y+3x^2\ ,\ x+3y^2\ ,\ -1\big)\,.$$

$$\Rightarrow \quad \nabla f\,(1,2,11) \;=\; (5\ ,\ 13\ ,\ -1)\,.$$

Portanto, a equação do plano tangente pedida é dada por

$$\begin{aligned} & (5\ ,\ 13\ ,\ -1)\cdot[(x,y,z)-(1,2,11)] = 0 \\ \Rightarrow\ & (5\,,\,13\,,\,-1)\cdot(x-1,y-2,z-11) = 0 \\ \Rightarrow\ & 5\,(x-1)+13(y-2)-1\,(z-11) = 0. \end{aligned}$$

♡

Observação 9.3.2: No exemplo anterior, vimos um caso em que o gráfico de uma função g coincidia com uma superfície de nível de uma função f. Também podemos determinar o plano tangente ao gráfico de uma dada função g, utilizando o procedimento de determinar o plano tangente a uma superfície de nível de uma nova função f criada, desde que o gráfico de g esteja contido em uma superfície de nível da nova função, pois, neste caso, também teremos que toda curva C inteiramente contida no gráfico de g, também estará inteiramente contida na superfície de nível em questão. Confira o exemplo a seguir.

Exemplo 9.3.3: Considere a função g dada por $g(x,y) = \dfrac{5}{6}\sqrt{9-9x^2-4y^2}$. Determine a equação do plano tangente ao gráfico de g, no ponto $\left(\dfrac{2}{3}, 1, g\left(\dfrac{2}{3},1\right)\right)$, pela duas formas mencionadas acima.

Solução:
1^a **forma**: Neste caso, vamos trabalhar com a função g dada e utilizar a fórmula de plano tangente ao gráfico de uma função. Sendo assim, temos que o plano tangente ao gráfico da função g no ponto $\left(\dfrac{2}{3}, 1, g\left(\dfrac{2}{3},1\right)\right)$ é dado por

$$z \;=\; g\left(\frac{2}{3},1\right) + \frac{\partial g}{\partial x}\left(\frac{2}{3},1\right)\left(x-\frac{2}{3}\right) + \frac{\partial g}{\partial y}\left(\frac{2}{3},1\right)(y-1)\,.$$

Desta forma, como $g\left(\dfrac{2}{3},1\right)=\dfrac{5}{6}$ e

$$
\begin{array}{rcl}
\dfrac{\partial g}{\partial x}(x,y) & = & -\dfrac{15}{2}\dfrac{x}{\sqrt{9-9x^2-4y^2}} \Rightarrow \dfrac{\partial g}{\partial x}\left(\dfrac{2}{3},1\right)=-5 \\
\dfrac{\partial g}{\partial y}(x,y) & = & -\dfrac{10}{3}\dfrac{x}{\sqrt{9-9x^2-4y^2}} \Rightarrow \dfrac{\partial g}{\partial x}\left(\dfrac{2}{3},1\right)=-\dfrac{10}{3}
\end{array}
$$

Portanto, o plano tangente ao gráfico da função g no ponto $\left(\dfrac{2}{3},1,g\left(\dfrac{2}{3},1\right)\right)$ é dado por

$$
z \;=\; \frac{5}{6}-5\left(x-\frac{2}{3}\right)-\frac{10}{3}(y-1)\,.
$$

2^a **forma**: Neste caso, elevando a equação $z=\dfrac{5}{6}\sqrt{9-9x^2-4y^2}$ ao quadrado, ficamos com $36z^2=225-225x^2-100y^2$. Fizemos isto para evitar a raiz. Considere então a função f dada por

$$
f(x,y,z)=225x^2+100y^2+36z^2-225.
$$

Observe que o gráfico da função g está contido na superfície de nível 0 da função f. Utilizando então o fato de que o gradiente de uma função é perpendicular a suas superfícies de nível, temos que o gradiente de f no ponto $\left(\dfrac{2}{3},1,\dfrac{5}{6}\right)$ é perpendicular à superfície de nível 0 de f neste ponto. Desta forma, a equação do plano tangente à superfície de nível 0 de f no ponto $\left(\dfrac{2}{3},1,\dfrac{5}{6}\right)$ é dada por

$$
\nabla f\left(\frac{2}{3},1,\frac{5}{6}\right)\cdot\left[(x,y,z)-\left(\frac{2}{3},1,\frac{5}{6}\right)\right]=0.
$$

Porém, como o gráfico da função g está contido na superfície de nível 0 da função f, a equação acima também é a equação do plano tangente ao gráfico da função g no ponto $\left(\dfrac{2}{3},1,\dfrac{5}{6}\right)$. Vamos então calcular o gradiente de f.

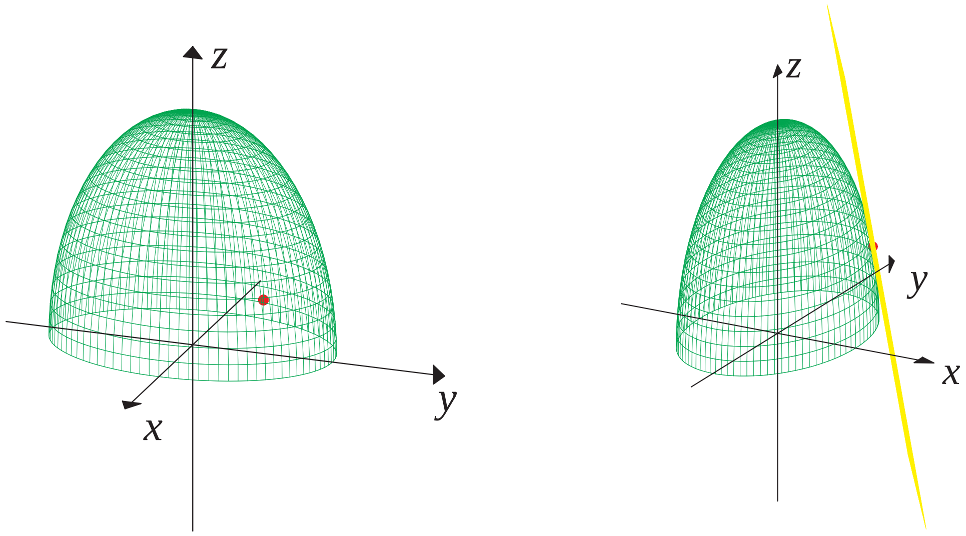
$$
\nabla f(x,y,z) \;=\; (450x\,,\,200y\,,\,72z)\,.
$$

$$
\Rightarrow\quad \nabla f\left(\frac{2}{3},1,\frac{5}{6}\right) \;=\; (300\,,\,200\,,\,60)\,.
$$

Portanto, a equação do plano tangente pedida é dada por

$$
\begin{array}{c}
(300\,,\,200\,,\,60)\cdot\left[(x,y,z)-\left(\dfrac{2}{3},1,\dfrac{5}{6}\right)\right]=0 \\
\Rightarrow\quad (15\,,\,10\,,\,3)\cdot\left(x-\dfrac{2}{3},y-1,z-\dfrac{5}{6}\right)=0 \\
\Rightarrow\quad 15\left(x-\dfrac{2}{3}\right)+10(y-1)+3\left(z-\dfrac{5}{6}\right)=0.
\end{array}
$$

Nas figuras abaixo temos um esboço da superfície S e do plano tangente à superfície S no ponto $\left(\dfrac{2}{3}, 1, \dfrac{5}{6}\right)$.



♡

Observação 9.3.2: Considere duas superfícies S_1 e S_2 dadas, respectivamente, pelas equações $f_1(x,y,z) = 0$ e $f_2(x,y,z) = 0$, onde f_1 e f_2 são supostas de classe C^1 no aberto $A \subseteq \mathbb{R}^3$. Suponha que $(x_0, y_0, z_0) \in A$ é um ponto pertencente a S_1 e a S_2 e que $\nabla f_1(x_0,y_0,z_0) \times \nabla f_2(x_0,y_0,z_0) \neq (0,0,0)$. Considere agora uma curva C, parametrizada pela função $\gamma : Dom(\gamma) \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, contida na interseção das superfícies S_1 e S_2. Seja $t_0 \in I($ aberto $) \in Dom(\gamma)$ e suponha que $\gamma(t_0) = (x_0, y_0, z_0)$ e $\vec{\gamma}\,'(t_0) \neq (0,0,0)$. Desta forma, como o vetor $\vec{\gamma}\,'(t_0)$ é tangente à curva C no ponto $\gamma(t_0) = (x_0,y_0,z_0)$, temos que ele é perpendicular a ambos os vetores $\nabla f_1(x_0,y_0,z_0)$ e $\nabla f_2(x_0,y_0,z_0)$, uma vez que $\nabla f_i(x_0,y_0,z_0)$ é perpendicular a qualquer curva contida em S_i, pois S_i é uma superfície de nível de f_i $(i = 1, 2)$. Portanto, o vetor $\gamma'(t_0)$ é paralelo ao vetor $\nabla f_1(x_0,y_0,z_0) \times \nabla f_2(x_0,y_0,z_0)$ (em $\mathbb{R}^3$, podemos ter, no máximo, três vetores linearmente independentes). Sendo assim, a equação da reta tangente à C no ponto $\gamma(t_0) = (x_0,y_0,z_0)$ é dada por

$$(x,y,z) \;=\; (x_0,y_0,z_0) + \lambda\left(\nabla f_1(x_0,y_0,z_0) \times \nabla f_2(x_0,y_0,z_0)\right), \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Exemplo 9.3.4: A curva C, imagem da função $\gamma : Dom(\gamma) \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, está contida na interseção das superfícies S_1, dada pela equação $x^2 + 2y^2 + z = 4$, e S_2, dada pela equação $x^2+y+z = 3$. Sabe-se que $t_0 \in I($ aberto $) \subseteq Dom(\gamma)$ é tal que $\gamma(t_0) = (1,1,1)$ e $\gamma'(t_0) \neq (0,0,0)$.

a) Determine a reta tangente à curva C no ponto $\gamma(t_0)$.
b) Determine uma curva C nas condições acima.

Solução:

a) Considere as funções f e g dadas por

$$f(x,y,z) = x^2 + 2y^2 + z - 4; \quad (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$$

e

$$g(x,y,z) = x^2 + y + z - 3; \quad (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$$

Neste caso, temos que a superfície S_1 é a superfície de nível 0 de f e a superfície S_2 é a superfície de nível 0 de g. Desta forma, como o gradiente de uma função é perpendicular as suas superfícies de nível, $\nabla f(1,1,1)$ é perpendicular à superfície S_1 no ponto $(1,1,1)$ e $\nabla g(1,1,1)$ é perpendicular à superfície S_2 no ponto $(1,1,1)$. Como a curva C está contida na interseção das superfícies S_1 e S_2, $\nabla f(1,1,1)$ e $\nabla g(1,1,1)$ são ambos perpendiculares à curva C no ponto $\gamma(t_0) = (1,1,1)$. Isto significa que $\nabla f(1,1,1)$ e $\nabla g(1,1,1)$ são ambos perpendiculares ao vetor tangente à curva C no ponto $\gamma(t_0) = (1,1,1)$, o qual é dado por $\vec{\gamma}\,'(t_0)$. Portanto, conforme já observado, $\gamma'(t_0)$ é paralelo ao produto vetorial $\nabla f(1,1,1)$ e $\nabla g(1,1,1)$, de modo que a equação da reta tangente à C no ponto $\gamma(t_0) = (1,1,1)$ é dada por

$$(x,y,z) \;=\; (1,1,1) + \lambda \left(\nabla f(1,1,1) \times \nabla g(1,1,1)\right), \;\; \lambda \in \mathbb{R}.$$

Sendo assim, vamos calcular os gradientes de f e de g no ponto $(1,1,1)$.

$$\nabla f(x,y,z) = (2x\,,\,4y\,,\,1) \;\text{ e } \nabla g(x,y,z) = (2x\,,\,1\,,\,1)$$

$$\Rightarrow \;\; \nabla f(1,1,1) = (2\,,\,4\,,\,1) \;\text{ e } \nabla g(1,1,1) = (2\,,\,1\,,\,1)\,.$$

Desta forma, temos que

$$\nabla f(1,1,1) \times \nabla g(1,1,1) \;=\; \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (3\,,\,0\,,\,-6).$$

$$(x,y,z) \;=\; (1\,,\,1\,,\,1) + \lambda(3\,,\,0\,,\,-6), \;\; \lambda \in \mathbb{R}.$$

b) Como a curva C está contida na interseção das superfícies S_1, dada pela equação $x^2 + 2y^2 + z = 4$, e S_2, dada pela equação $x^2 + y + z = 3$, os pontos $(x,y,z) \in C$ satisfazem as duas equações. Desta forma, isolando z nas equações das superfícies, temos que

$$z = 4 - x^2 - 2y^2 \text{ e } z = 3 - x^2 - y$$

Portanto

$$4 - x^2 - 2y^2 = 3 - x^2 - y \Leftrightarrow 2y^2 - y - 1 = 0 \Leftrightarrow y = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{4} \Leftrightarrow y = 1 \text{ ou } y = -\frac{1}{2}.$$

Como a curva C contém o ponto $(1\,,\,1\,,\,1)$, a única opção é $y = 1$. Sendo assim, substituindo $y = 1$ nas equações de S_1 e/ou S_2, segue que

$$x^2 + z = 2 \Leftrightarrow z = 2 - x^2.$$

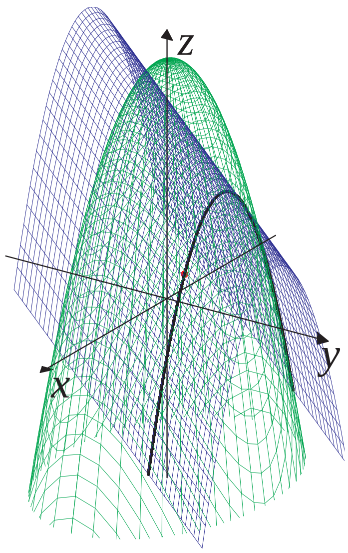
Portanto, fazendo $x = u$, temos que uma parametrização β para a curva C é dada por $\beta(u) = (u, 1, 2 - u^2)$, $u \in \mathbb{R}$.

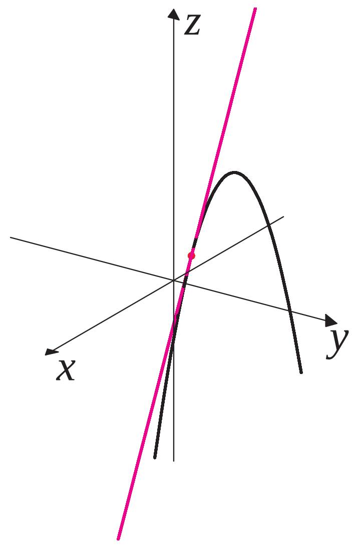
Observe que utilizando esta parametrização, temos que a equação da reta tangente a C no ponto $\beta(u_0) = (1\,,\,1\,,\,1)$ é dada por

$$\begin{aligned} (x, y, z) &= (1\,,\,1\,,\,1) + \lambda\,\vec{\beta}\,'(u_0), \quad \lambda \in \mathbb{R} \\ &= (1\,,\,1\,,\,1) + \lambda(1\,,\,0\,,\,-2), \quad \lambda \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

que coincide com a equação encontrada no item (a).

Nas figuras abaixo temos um esboço das superfícies S_1, S_2, da curva C e da reta tangente à curva C no ponto $(1, 1, 1)$.





♡